Conservación de la probabilidad. Densidad de corriente de probabilidad.

Podemos analizar si en el caso en el que la partícula esté sometida a una fuerza también se conserva la densidad de probabilidad. Si notamos de nuevo por ρ la densidad de probabilidad de encontrar a la partícula podemos calcular su derivada respecto del tiempo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \psi^*}{\partial t}\psi + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\frac{\hbar}{2m}\psi\nabla^2\psi^* + \frac{i}{\hbar}\psi V\psi^* + i\frac{\hbar}{2m}\psi^*\nabla^2\psi - \frac{i}{\hbar}\psi^* V\psi$$

donde hemos supuesto que lógicamente el potencial es una función real. En este caso, los términos que dependen del potencial se anulan y queda:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\hbar}{2m}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right)\right]$$

de modo que podemos definir de nuevo la densidad de corriente de probabilidad como:

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2m}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right) = \frac{1}{m}\Re\left(\psi^*(-i\hbar\vec{\nabla})\psi\right)$$

Sin embargo, ahora podemos dar una connotación nueva a la densidad de corriente de probabilidad, ya que el operador que aparece entre la función de onda y su compleja conjugada es el operador momento. Por tanto, la ecuación anterior la podemos escribir de la forma:

$$\vec{j} = \Re\left(\psi^*\frac{\hat{\mathbf{p}}}{m}\psi\right) = \Re\left(\psi^*\hat{\mathbf{v}}\psi\right)$$

que podría ser algo así como la densidad de probabilidad multiplicada por la velocidad, salvo que en este caso la velocidad es un operador.

Debido a que la densidad de probabilidad satisface una ecuación de continuidad, la probabilidad total de encontrar a la partícula en cualquier punto del espacio se conservará. Si la función de onda está inicialmente normalizada, de modo que dicha probabilidad total sea igual a la unidad, seguirá siendo igual a la unidad a lo largo del movimiento de la partícula. Esto podíamos considerarlo como una ventaja ya que resulta razonable el que la partícula no desaparezca, sin embargo la teoría que estamos construyendo tiene limitaciones, ya que no servirá para describir los procesos de creación y aniquilación de partículas que ocurren a altas energías (tampoco servirá para la descripción del campo electromagnético en la que intervienen continuamente procesos de creación y aniquilación de fotones).

Vamos a escribir la función de onda de una forma más adecuada para calcular la densidad de corriente de probabilidad. La función de onda se puede escribir sin pérdida de generalidad de la siguiente forma:

$$\psi(\vec{r},t) = A(\vec{r},t)e^{\frac{i}{\hbar}S(\vec{r},t)}$$

donde $A(\vec{r},t)$ y $S(\vec{r},t)$ son dos funciones reales. En este caso, la densidad de probabilidad de encontrar a la partícula en un punto determinado viene dada por el cuadrado de la función $A(\vec{r},t)$, es decir, $\rho(\vec{r},t) = A^2(\vec{r},t)$. Por otro lado, podemos obtener la densidad de corriente de probabilidad de la siguiente igualdad:

$$\psi^*(-i\hbar\vec{\nabla})\psi = -i\hbar A\vec{\nabla}A + A^2\vec{\nabla}S$$

tomando la parte real y dividiendo por la masa obtenemos la desidad de corriente de probabilidad:

$$\vec{j} = A^2\frac{\vec{\nabla}S}{m}$$

Podemos interpretar este resultado de la siguiente forma. La densidad de corriente de probabilidad es igual a la densidad de probabilidad multiplicado por $\vec{\nabla}S/m$. Este término debe ser el campo de velocidades con el que se mueve la densidad de probabilidad. Es decir, podemos hacer un símil de la densidad de probabilidad con un fluido. La densidad de probabilidad sería la densidad del fluido, mientras que la función $\vec{v}(\vec{r},t) = \vec{\nabla}S(\vec{r},t)/m$ sería el campo de velocidades con el que se mueve cada punto del fluido. Posteriormente veremos que existe una conexión entre la función $S(\vec{r},t)$ y la función principal de Hamilton de la mecánica clásica. El resultado que hemos obtenido lo podíamos haber intuido. La función de onda incluye tanto la información sobre la distribución de probabilidad de encontrar a la partícula como sobre la distribución de velocidades de la partícula. Ahora bien, la información sobre la distribución de velocidades debe estar contenida en la fase de la función de onda, ya que es la parte que desaparece al tomar el módulo al cuadrado de la función de onda.